フィボナッチ数の謎に迫る！

☆フィボナッチ数列とは

フィボナッチ数列とは、1、1、2、3、5、8、13、21、34、55、89、144、233、377、610、987、……と続く数列のことである。最初の2項を(1、1)と定めて、それらを足した数を次の項にする。このように、1つ前と2つ前の数を足して次の項をつくる作業を繰り返してできる数列である。この数列は、黄金比(1:1.618…、このときの1.618…と続く値を黄金率という)と関係が非常に深く、フィボナッチ数のn+1番目の数からn番目の数(nは整数)を割った値は、nの値を大きくするほど黄金率に近づいていくという性質がある。例えば、同数列の第15項は610、第16項は987であるが、987÷610を計算すると1.61803278688525…という値になる(これは整数の分数の形にできるので有理数)。黄金率は、1.61803398874989…と続く無理数であるが、15、16項めの時点で既に「1.61803」の部分が一致していることが分かる。さらに、第32項(2178309)から第31項(1346269)を割ると、1.61803398874965…という値になり(同様に有理数)、黄金率と「1.618033988749」の部分まで一致する。このように、割り算する数列の値を大きくするほど、商は黄金率に近くなることがわかる。フィボナッチ数列は無限に続くため、割り算する数列の値は無限に大きくできるが、それらの商は全て有理数となるため、割り切れるか循環小数になる。よって、割り算する数列の値をどれだけ大きくしても、商は黄金率の近似値になる。

また、黄金率は $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ という$\sqrt{\ }$を用いた分数の形に直すことができ、「円周率π」のように、ギリシャ文字のϕ(ファイ)を使って表すこともある。 $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

☆初2項が任意の数の数列

上で述べたような性質は、フィボナッチ数列に限らず、最初の2項をどんな自然数に定めた数列でも現れる。

初2項(1、3)のとき→1、3、4、7、11、18、29、47、76、123、199、322、521、843、…
76÷47=<u>1.61</u>702128…　843÷521=<u>1.6180</u>4223…
初2項(1、5)のとき→1、5、6、11、17、28、45、73、118、191、309、500、809、1309、…
118÷73=<u>1.61</u>643836…　1309÷809=<u>1.6180</u>4697
初2項(3、1)のとき→3、1、4、5、9、14、23、37、60、97、157、254、411、665、…
97÷60=<u>1.61</u>666666…　665÷411=<u>1.6180</u>0486
初2項(100、7)のとき→100、7、107、114、221、335、556、891、1447、2338、3785、6123、9908、…
556÷335=<u>1.6</u>5970149…　9908÷6123=<u>1.618</u>16103…

☆研究の概要

フィボナッチ数列が持つ特徴は、このような特徴だけではない。ここからは、自分の研究の中で具体的に考えた、フィボナッチ数列の中にある、とある規則性についてまとめていく。

☆周期的に現れるa_nの倍数

数列の第n項を a_nと表すが、フィボナッチ数列について、次のようなきまりがあることを見つけた。

①フィボナッチ数列で、a_nの倍数は、n個おきに現れる

具体的にどういうことかというと、例えば、n=3を代入してみる。$a_3=2$なので、フィボナッチ数列では、2の倍数は3つおきに現れるということである。では本当にそのようになっているのか確かめてみよう。　※黒背景が2の倍数↓

<図1>1、1、2、3、5、8、13、21、34、55、89、144、233、377、610、987、1597、2584、4181、6765、10946…

2の倍数は3つおきに現れることが確かめられた。これは、初2項が(1、1)と奇数であることからも確かめられる。

奇＋奇＝偶
　奇＋偶＝奇
　　偶＋奇＝奇
　　　奇＋奇＝偶…
↑　↑　↑　↑　↑　↑
a1　a2　a3　a4　a5　a6…

☆奇数と奇数の和が偶数であることの証明

n、mを整数とすると2つの奇数は$2n+1$、$2m+1$と表される。

$(2n+1)+(2m+1)=2n+2m+2=2(n+m+1)$

$n+m+1$は整数だから、$2(n+m+1)$は偶数

よって、奇数と奇数の和は偶数である。

☆奇数と偶数の和が奇数であることの証明

n、mを整数とすると偶数は$2n$、奇数は$2m+1$と表される。

$2n+(2m+1)=2n+2m+1=2(n+m)+1$

$n+m$は整数だから、$2(n+m)+1$は奇数

よって、奇数と偶数の和は奇数である。

では、他の倍数は？ということで、確かめてみよう。①にn=4を代入してみる。

$a_4=3$なので、3の倍数は4つおきに現れることになる。図1を見ると、数列の中の3の倍数は、3、21、144、987、6765…であるから4つおきになることが確かめられる。これは、初2項が(1、1)で、1を3で割ると0あまり1であることからも確かめられる。

※3で割ったときの余り
余1+余1=余2
　余1+余2=余0
　　余2+余0=余2
　　　余0+余2=余2
　　　　余2+余2=余1←$(3n+2)+(3m+2)=3(n+m+1)+1$であるため。
　　　　　余2+余1=余0　※n、mは整数
　　　　　　余1+余0=余1
　　　　　　　余0+余1=余1
　　　　　　　　余1+余1=余2
　　　　　　　　　余1+余2=余0…
↑　↑　↑　↑　↑　↑　↑　↑　↑　↑　↑　↑
a1　a2　a3　a4　a5　a6　a7　a8　a9　a10　a11　a12…

このように、①で、$n \geq 5$を代入した場合も、それぞれの項の余りの数を考えると3の倍数のときと同様にa_nの倍数がn個おきに現れるきまりが成り立つといえる。なお、「4の倍数」のように、「数列の中にない数」の倍数は、「その数の倍数のうち、数列の中にある数で最小のもの」の倍数を考えればよい。4の倍数の場合は8の倍数になる。整数の集合の中では、{4の倍数}⊃{8の倍数}であるが、フィボナッチ数の集合の中では{4の倍数}={8の倍数}になる。

☆a_nの倍数の中でのきまり

次に、フィボナッチ数列の中から各数の倍数を取り出したとき、その数の並びには、どんなきまりがあるかについて考えた。そこでまず、次のような"性質"を見つけた。

②$a_{(nm)} \fallingdotseq \left[a_{\{n(m-1)\}}\right]^2 \div \left[a_{\{n(m-2)\}}\right]$ ※nは自然数、mは3以上の自然数

具体的にどういうことかというと、例えば、(n、m)=(5、3)を代入してみる。すると、$a_{15} \fallingdotseq (a_{10})^2 \div a_5$となる。ここに実際の値を代入して計算してみると、$610 \fallingdotseq 55^2 \div 5$（=605）という式になる。では次に、(n、m)=(5、4)を代入してみる。すると、$a_{20} \fallingdotseq (a_{15})^2 \div a_{10}$より$6765 \fallingdotseq 610^2 \div 55$（=6765.454545…）という式になる。言葉で説明すると、数列の中の「あるnの倍数」を2乗し、それを「その1つ前のnの倍数」で割ると、商は「あるnの倍数」の次のnの倍数に近い値になるということである。具体例を見ても、610と605、6765と6765.454545…のように、「≒」で結ばれた両辺が近い値になっていることがわかる。これも最初に説明した「前項比が黄金率に近い値になる性質」と同様に、nを一定の値に決めて、mの値を大きくすればするほど、「≒」で結ばれた両辺の誤差が小さくなっていくという性質があることもわかった。

例では5の倍数で試したが、他の倍数でも試してみる。

3の倍数→$144 \fallingdotseq 21^2 \div 3 = 147$、$987 \fallingdotseq 144^2 \div 21 = 987.428571\cdots$、

$6765 \fallingdotseq 987^2 \div 144 = 6765.0625$、$46368 \fallingdotseq 6765^2 \div 987 = 46368.00911854103\cdots$

13の倍数→$10946 \fallingdotseq 377^2 \div 13 = 10933$、$317811 \fallingdotseq 10946^2 \div 377 = 317811.4482758621\cdots$、

$9227465 \fallingdotseq 317811^2 \div 10946 = 9227464.98456057\cdots$

しかし、≒のままでは具体的な公式にすることができないため、等式に直すために次のように考えた。

〈考え方〉

$$a_{(nm)} \fallingdotseq [a_{\{n(m-1)\}}]^2 \div [a_{\{n(m-2)\}}]$$

$$\rightarrow a_{(nm)} = [a_{\{n(m-1)\}}]^2 \div [a_{\{n(m-2)\}}] - (\text{誤差})$$

$$\rightarrow [a_{\{n(m-1)\}}]^2 \div [a_{\{n(m-2)\}}] = a_{(nm)} + (\text{誤差})$$

$$\rightarrow [a_{\{n(m-1)\}}]^2 - a_{(nm)}[a_{\{n(m-2)\}}] = (\text{誤差})$$

誤差を明確化するために、上のように移項し、割り算を引き算に直して考えた。すると、次のような公式を見つけた。

③・nが偶数のとき $\rightarrow [a_{\{n(m-1)\}}]^2 - a_{(nm)}[a_{\{n(m-2)\}}] = (a_n)^2$

・nが奇数のとき

・mが偶数のとき $\rightarrow [a_{\{n(m-1)\}}]^2 - a_{(nm)}[a_{\{n(m-2)\}}] = (a_n)^2$

・mが奇数のとき $\rightarrow [a_{\{n(m-1)\}}]^2 - a_{(nm)}[a_{\{n(m-2)\}}] = -(a_n)^2$

※nは自然数、mは3以上の自然数

誤差とされていた値が、この式に変形することにより、規則的な決まった値になることがわかった。今回は、nが奇数か偶数かで、誤差の符号が変動するか否か、という違いが生じたため、3種類に式を分けて示した。

まず、nが偶数の場合から具体例を見ていく。

(n、m)=(4、3)のとき→$21^2 - 144 \times 3 = 9$　(n、m)=(4、4)のとき→$144^2 - 987 \times 21 = 9$

(n、m)=(4、5)のとき→$987^2 - 6765 \times 144 = 9$

(n、m)=(4、6)のとき→$6765^2 - 46368 \times 987 = 9$　………

このように、nを定数とすると、mがどう変動しても式の値は一定になるということがわかった。n=4の場合、$a_4=3$であることから、式の値は3の2乗の9となる。

次に、nが奇数の場合の具体例を見ていく。

(n、m)=(5、3)のとき→$55^2 - 610 \times 5 = -25$

(n、m)=(5、4)のとき→$610^2 - 6765 \times 55 = 25$

(n、m)=(5、5)のとき→$6765^2 - 75025 \times 610 = -25$

(n、m)=(5、6)のとき→$75025^2 - 832040 \times 610 = 25$　………

このように、mを奇数にすると式の値は負、mを偶数にすると式の値は正となり、式の値の絶対値は変化しなかった。

nを他の自然数にしても、これらの公式に当てはまることを確認できた。

☆まとめ

・一連の研究から、フィボナッチ数列はanの倍数が規則的に並んでいて、また、anの倍数に限定して数を並べた場合にも、公式が成立することがわかった。

・anの倍数が規則的に並ぶ理由を、anで割ったときの余りから考えられた。

・見つけた規則性を、数学の知識を生かして具体的な文字式に置き換えることができた。

☆今後の展望

・③で、式の値が$\pm(an)^2$となった理由を高校で学ぶ発展的な数学の知識から考えたい。

・③で、式の値に符号の変動がある理由を高校で学ぶ発展的な数学の知識から考えたい。

☆参考文献

・ナツメ社「算数なるほど大図鑑」桜井進 監修　p250-251
・https://ja.wikipedia.org/wiki/フィボナッチ数　2022/04/10
・https://ja.wikipedia.org/wiki/フィボナッチ素数　2022/04/10

※この研究は、2019年度に福井大学で行われた、ジュニアドクターふくい育成コース(2年目プログラム)において、古閑義之准教授(当時)のご指導のもと考えた内容を自分なりにさらに発展させてまとめたものです。