τ と π

武生高校探究進学科

1．テーマと動機

私達は数学の問題において、円錐の体積や円の面積、果ては三角関数の積分やすべての素数の積を表す時などにも、必要であれば何の考えもなしに3. 1415926535…と無限に続く無理数を円周÷直径で定義される円周率としてギリシャ文字π（パイ）とおいてしまっている。しかし円の定義とは「ある定点から距離が等しい点の集合」である。つまり、円の基準は半径とみてとれる。だけれども、円周率の定義を円周÷直径としてしまっている。これは明らかにおかしいように思え、本当の円周率は円周÷半径と定義づけるべきではないのかと考えてしまう。そこで円周÷半径で定義するギリシャ文字τ（タウ）を用いると、今までπが使われてきた式がどのような変化をするのかとても気になった。だから、我々はπとτ、どちらが優秀なのかを詳しく調べ、ここに書き記すことにした。もしも、τがπよりも便利ならば、そのことをこれを見ている人だけでもτという存在を知ってもらい、頭の片隅にでもいいので記憶しておいてほしい。

2．問いと仮説

⑴ 問い　πよりもτを使ったほうがより数学の本質に近づけるのか？

⑵ 仮説　前述のようにπよりもτのほうが円周率としては本質に近いため、τのほうがより数学の本質に近づける。

3．調査方法

現在πが使われている公式にτ＝2πで当てはめてみることで式がどれだけシンプルになるのかを調べる。

4．結果（τ = 2πと考える）

円周の長さ(円周をL半径をr)　　$L = 2\pi r = \tau r$

（説明）τ の定義が$\tau = L \div r$であるため変形すると上の式が出来上がる。

τを用いると円周を文字だけで表すことができるため便利である

扇形の弧の長さ(扇形の弧をL’中心角をθ) $L' = 2\pi r \times \frac{\theta}{360} = \tau r \times \frac{\theta}{360}$

（説明）半径が等扇形の弧の長さは中心角に比例するため、円周に角度をかけることで式は弧の長さを表現できる。

球の体積(体積をV) $V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{2}{3}\tau r^2$

（説明）π に対する τ の優位性はこれと言ってないがτr^3は球に外接する円柱の体積になるので「球の体積はそれに外接する円柱の体積の$\frac{2}{3}$である」というアルキメデスが導き出した性質の係数が端的に示されている。

角度を弧度法で表記するとき 1周＝ τ

弧度法とは円の半径と扇形の弧の長さに注目して角度を表す方法で、扇形の弧の長さを半径で割ると円の大きさに関わらず一定になる性質を利用して

角度θ＝円弧の長さl ÷半径rと表せるというものである。また半径＝1を代入すると

θ＝$\frac{l}{r} = l$つまり半径＝1のときの角度は弧の長さである。また弧度法の単位を

rad(ラジアン)といい1radは半径と弧の長さが等しい時の角度なので$l = r$で

θ＝$\frac{r}{r}$＝1となる。また、度数法で表すと、$1rad = x°$と置く。すると

$2\pi r\times\frac{x}{360}=r$となり整理して$x=\frac{180°}{\pi}$となる。つまり1rad＝$\frac{180°}{\pi}$となる。そして、両辺にπをかけて$\pi=180°$となる。また$1°=\frac{\pi}{180}$である。これらの式は半周がπであり一周は2πであることを示している。しかし、それは感覚的に違和感を覚える。

一周＝円周率のほうが遥かにしっくり来ると私は思う。そこでτである。

$2\pi r\times\frac{x}{360}=r$この式に2π＝τを代入し$\tau r\times\frac{x}{360°}=r$で整理して、$x=\frac{360°}{\tau}$となるため1rad=$\frac{360°}{\tau}$となり、これに両辺τをかけるとτ＝360°となる。この式は一周が円周率と等しいことを示している。こちらのほうがπのときに比べて遥かに感覚的にもわかりやすくきれいなように思える。

(例)45°をradで表す時、πの場合$\frac{1}{4}\pi$ radとなり、τの場合$\frac{1}{8}\tau$ rad となる。

45°は円で考えると$\frac{1}{8}$周でありτのほうがとてもわかり易いことが目に見えてわかる。

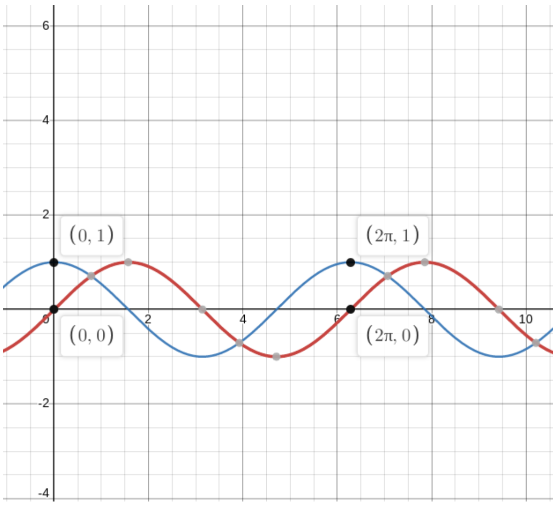
次からは、説明した弧度法を用いて三角関数や円の面積の証明を行っていきたいと思う。

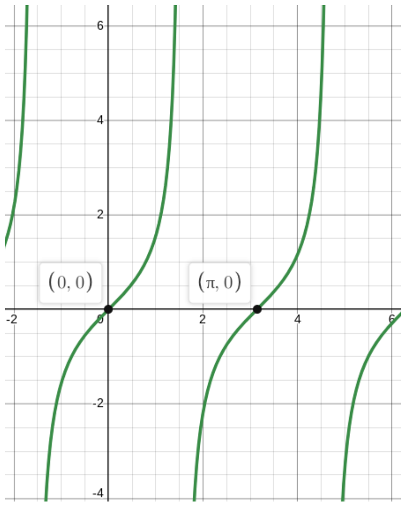
三角関数

三角関数は周期関数でありxの部分には扇形の弧と半径の比に注目する弧度法が用いられる。弧度法とは、1つの円において、「半径と等しい長さの弧に対する中心角の大きさ」を1rad(ラジアン)と定義し、1radを単位とする表し方。つまり$sinx$は角度が$x$radのときのsinθであるといえる。

また$sinx$と$cosx$の周期は2πごと,$tanx$の周期はπごとに現れる。(下図参照)

※(2π,0)を通る関数が$cosx$,(2π,1)を通る関数が$sinx$,(π,0)を通る関数が$tanx$である



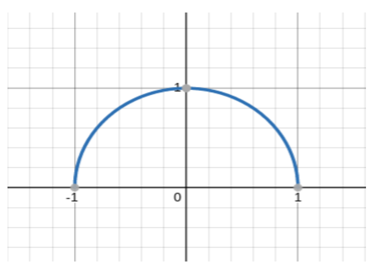


これをτを用いて表すと$sinx$,$cosx$の周期はτごと$tanx$の周期は$\frac{\tau}{2}$ごととなり、$sinx$の$y = 0$を通る点(零点)は$\pi, 2\pi, 3\pi$とπごと$cosx$においても$\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}$と$\pi$ごとに$y = 0$を取る事がわかる、これは$\tau$に直すと$\frac{\tau}{2}$ごとにy=0を取ることになり、これは度数法で言う180° が弧度法で言う$\frac{\tau}{2}$radと言い表せるということなのだ。これは弧度法のときに説明した値と同じになるので考え方は正しいといえるだろう。つまりπの代わりにτを用いることで、円を一周する角度をτ radと一文字で表せるのである。πにすれば360° は2π radとなるため、どちらが直感的にわかりやすいかは自明であろう。

円の面積(面積をSとしている)

$$S = \pi r^2 = \frac{1}{2}\tau r^2$$

(説明)原点を中心として半径がrである円は$x^2 + y^2 = r^2$。これをyについて解くと$y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$である。この場合、円の上半分だけを関数として抽出すると$y = \sqrt{r^2 - x^2}$である(右図参照)。円の面積は先程のグラフで囲まれた面積の2倍なので$S = 2\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2 - x^2}dx$と積分を立式する事ができる。積分



とは面積を求めることができるものなので、上の積分が表すものは半円の面積の二倍、つまり円の面積である。今からこれを解いていく

$x = r sin\theta\left(-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right)$と置換し、それを$\theta$で微分すると$\frac{dx}{d\theta}$＝$r cos\theta$になり、したがって

$dx = r cos\theta d\theta$である。よって

$$\frac{S}{2} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{r^2 - r^2 sin^2\theta} \cdot (r cos\theta) d\theta$$

$$= r^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} cos^2\theta d\theta$$

三角関数の半角の公式に当てはめると

$$\frac{S}{2} = r^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+cos2\theta}{2} d\theta$$

$$= \frac{r^2}{2}\left[\theta + \frac{sin2\theta}{2}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{\pi r^2}{2}$$

したがってS＝πr^2となる。またここでπをτに置き換えると$S = \frac{1}{2}\tau r^2$であることは自明である。

一見これに置き換えても特にメリットはないように思える。しかし、τを用いた式であろうとπを用いた式であろうと面積の式として違和感はない。むしろ三角形や台形の面積などで$\frac{1}{2}$をかけることが多いため。それらとは$\frac{1}{2}$を掛ける理由は違えどτの式のほうがしっくり来ると思う人もいることだろう。

オイラーの等式

オイラーの等式とはオイラーの公式と呼ばれる$e^{i\theta} = cos\theta + isin\theta$という式に

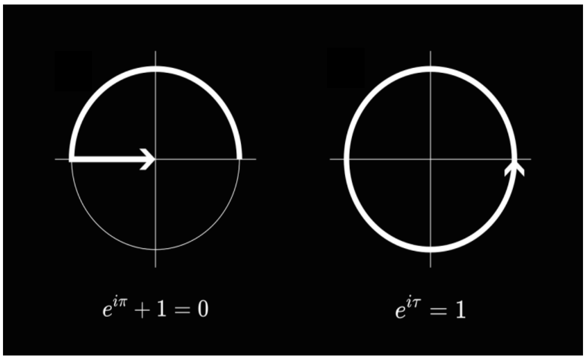
θ＝πを代入し、$cos\pi =- 1$,$isin\theta = 0$で、$e^{i\pi} =- 1 + 0$、−1を移行すると、$e^{i\pi} + 1 = 0$

という式が出来る。

これは幾何学のπ、解析学のe(ネイピア数)、代数学のi(虚数単位)の数学の三大分野が一つの簡単な式で表されており、世界で最もきれいな式と呼ばれている。しかし、＋1を移行すると、$e^{i\pi} =- 1$となり、マイナスという邪魔なものが入ったように思える。そこで、先程のオイラーの公式にθ＝τを代入してみると、$cos\tau = cos2\pi = 1$、$isin\tau = isin2\pi = 0$となり

$e^{i\tau} = 1$となった。この式は、先程の、$e^{i\pi} + 1 = 0$よりも、項が少なくなったため、よりこちらのほうがきれいになったように思える。

また、これらの式を縦軸がIm軸（虚軸）、横軸がRe軸（実軸）の複素数平面上で表すと、右図のようになり、どちらが美しいかは、一目瞭然である。



5. 考 察

結果からπを使うと余計なものが出てきてしまうのに対して、τは円の面積は円周の積分であるから係数$\frac{1}{2}$がかかってくるのは自然だと思うし 球の体積も「球の体積はそれに外接する円柱の体積の$\frac{2}{3}$である」という性質が係数としてかかってくるため、τを用いれば多くの式が簡単にそして本質的に書けると思われる。また世界一美しい数式と言われているオイラーの等式もπを使うよりτを使ったほうがより美しくなる。これらから見ると圧倒的に円の直径に対する比より円の半径に対する比のほうが便利であるが、我々は一部の式でしか検証でき

ていないため先人たちが間違っていたと否定することはできない。また、πをτに置き換えることで、円周の値が変わるわけでもないし、円の面積が変わるわけでもない。強いていうぐらいなら弧度法の感覚としてのわかりやすさが上がったくらいだ。つまり本質的にはτとπを入れ替えてもほとんど一緒なのではないかと考えられる。

6. まとめ

今回はπとτについて詳しく調べ、まとめてみたが、私たちが思っていた以上にτとπとの間で違いがなく、式の形がきれいになったり弧度法のわかりやすさが上がった程度で終わってしまった。この点に関しては仮定の「πの代わりにτを用いることで数学の本質に近づける」というのは少し違っていたとも取れる。しかし、今回私達は簡単な式の証明、説明で終わってしまった。そのため次回またまとめるときはすべての素数の積などもう少し難しいものの証明や複雑な式を紐解くことでπの代わりにτを使っても本当にその程度しか利益がないのかもう一度調べたい。

7. 参考文献

τに関しての本は全く無く、論文も殆どなかったためかなりインターネットだよりになってしまった。しかし、数学の答えは必ず一つしかないので発信元によって求めるまでの過程は違えど結果が変わってくる事は無いので信頼性は十分にあると考えられる。

円の面積の証明:https://mathwords.net/enmensekibun

球と円柱:

http://www.kuboj.com/chiebukuro/%E5%86%86%E6%9F%B1%E3%81%AB%E5%86%85%E6%8E%A5%E3%81%99%E3%82%8B%E7%90%83%E3%81%AE%E8%A1%A8%E9%9D%A2%E7%A9%8D%E6%AF%94%E3%81%A8%E4%BD%93%E7%A9%8D%E6%AF%94%E3%81%AB%E3%81%A4%E3%81%84%E3%81%A6/

オイラーの等式

https://mathlandscape.com/euler-formula/

弧度法

https://goukaku-suppli.com/archives/37550#:~:text=%E5%BC%A7%E5%BA%A6%E6%B3%95%E3%81%A8%E3%81%AF%E3%80%81%E6%89%87%E5%BD%A2,%E3%81%9A%E4%B8%80%E5%AE%9A%E3%81%AB%E3%81%AA%E3%82%8A%E3%81%BE%E3%81%99%E3%80%82